Rozšíření MA1 pro biochemiky.
Funkce více proměnných - příklady 3 (funkce definované implicitně a vyšetřování extrémů).

Funkce definované implicitně:

1. Implicitní funkce jedné proměnné:

Ukažte, že rovnicí $F(x,y)=0$ je v okolí bodu (x_0,y_0) definována implicitně funkce $y=f(x)$.
Pak i) vypočítejte $f'(x_0)$ a $f''(x_0)$,
ii) napište rovnici tečny ke křivce, dané rovnicí $F(x,y)=0$ v bodě (x_0,y_0),
iii) aproximujte funkci $f(x)$ v okolí bodu $x_0=1$ pomocí Taylorova polynomu 2.stupně, když:

a) $F(x,y)=x^2-y^3+x^2y-1$, $(x_0,y_0)=(1,0)$;
b) $F(x,y)=x^3+y^3-3xy-3$, $(x_0,y_0)=(1,2)$;
c) $F(x,y)=y^3-2xy^2-xy-8$, $(x_0,y_0)=(0,2)$;
d) $F(x,y)=xy-e^x+e^y$, $(x_0,y_0)=(0,0)$;
e) $F(x,y)=xy-\ln y-2$, $(x_0,y_0)=(2,1)$;
f) $F(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}-arctg\dfrac{y}{x}$, $(x_0,y_0)=(1,0)$.

2. Implicitní funkce dvou proměnných:

Ukažte, že rovnicí $F(x,y,z)=0$ je v okolí bodu (x_0,y_0,z_0) definována implicitně funkce $z=f(x,y)$, která má v okolí bodu (x_0,y_0) spojité parciální derivace druhého řádu. Pak
(i) určete první a druhý diferenciál funkce f v bodě (x_0,y_0);
(ii) napište rovnici tečné roviny a normály k ploše, definované rovnicí $F(x,y,z)=0$, v bodě (x_0,y_0,z_0), když:

a) $F(x,y,z)=z^3-2xz+y$, $(x_0,y_0,z_0)=(1,1,1)$;
b) $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2xyz-4$, $(x_0,y_0,z_0)=(0,0,2)$;
c) $F(x,y,z)=\dfrac{x}{z}-\log\dfrac{z}{y}$, $(x_0,y_0,z_0)=(0,1,1)$;
d) $F(x,y,z)=e^{z-2x}-xz+2yz-2y-xy^2$; $(x_0,y_0,z_0)=(1,1,2)$.

3. (i) Nechť funkce $F(x,y,z)$ má spojité parciální derivace prvního řádu v okolí bodu (x_0,y_0,z_0) a nechť platí $F(x_0,y_0,z_0)=0$. Odvoďte rovnici tečné roviny k ploše, dané rovnicí $F(x,y,z)=0$ v bodě (x_0,y_0,z_0) za předpokladu, že aspoň jedna z parciálních derivací 1.řádu funkce F je v bodě (x_0,y_0,z_0) nenulová.
(ii) Napište rovnici tečné roviny a vektorovou rovnici normály v bodě (x_0,y_0,z_0) k ploše, dané rovnicí $F(x,y,z)=0$, když

a) $F(x,y,z)=x^3+y^3+z^3+xyz-6$, $(x_0,y_0,z_0)=(1,2,-1)$;
b) $F(x,y,z)=x\sin z+y\cos z-e^z$, $(x_0,y_0,z_0)=(2,1,0)$.

4*. Rozhodněte, kdy je rovnicí $G(x,y,z)=0$ definována implicitní funkce $z=g(x,y)$, je-li $G(x,y,z)=F(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{y})$. Ukažte, že potom platí $x\dfrac{\partial g}{\partial x}+y\dfrac{\partial g}{\partial y}=g$.

5. Soustavy implicitně definovaných funkcí.

1. Ukažte, že soustavou rovnic $x^2 + y^2 = z$
$x + y + z = 2$ (*)
jsou v okolí bodu $(x_0, y_0, z_0) = (-1,1,2)$ definovány implicitně funkce $y = f(x)$, $z = g(x)$.
Určete $f'(-1)$ a $g'(-1)$ a tečný vektor ke křivce, dané rovnicemi (*) , v bodě $(-1,1,2)$.

2. Ukažte, že soustavou rovnic $x^3 + y^3 - z^3 = 10$
$x + y + z = 0$
jsou v okolí bodu $(x_0, y_0, z_0) = (1,1,-2)$ definovány implicitně funkce $y = f(x)$, $z = g(x)$.
Najděte aproximace funkcí f , g v okolí bodu $x_0 = 1$ pomocí Taylorova polynomu druhého stupně.

3. (*) Ukažte, že soustavou rovnic $x + y - 2u^2 + v^2 = 0$
$x - y - uv = 0$
jsou v okolí bodu $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (1,0,1,1)$ definovány implicitně funkce $u = f_1(x,y)$, $v = f_2(x,y)$.
Určete totální diferenciál zobrazení $f = (f_1, f_2)$ v bodě $(1,0)$.

Vyšetřování lokálních a globálních extrémů:

1. Vyšetřete na množině M globální a lokální extrémy následujících funkcí:

a) $f(x,y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$, $M = R^2$;
b) $f(x,y) = 12xy - x^2y - xy^2$, $M = R^2$ (*);
c) $f(x,y) = (x-y)^2 + (y-1)^3$, $M = R^2$;
d) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2y$, $M = R^2$;
e) $f(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$, $M = R^2$ (*).

2. Vyšetřete globální extrémy funkce $f(x,y)$ na množině M , je-li:

a) $f(x,y) = x^2y(4 - x - y)$, $M = \{(x,y); x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 6\}$;
b) $f(x,y) = xy^2$, $M = \{(x,y);\ x^2 + y^2 \leq 1\}$;
c) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2y$, $M = \{(x,y);\ x^2 \leq y \leq 4\}$;
d) $f(x,y) = xy$, $M = \{(x,y);\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ (*).

3. Při jakých rozměrech má pravoúhlá vana daného objemu V nejmenší povrch?